

# „Schweinereien“ – Grundschüler untersuchen einen asymmetrischen Zufallsgenerator

SANDRA SCHNABEL, MARBURG & BERND NEUBERT, GIESSEN

**Zusammenfassung:** Im Beitrag wird eine Studie aus einer 4. Klasse vorgestellt, in der das „Würfelschwein“ aus dem Gesellschaftsspiel „Schweinereien“ als Zufallsgenerator verwendet wurde. Im Zentrum der Betrachtungen stehen der Aufbau der Studie, Forschungsfragen, Aufgabenstellungen für die Kinder und ausgewählte Untersuchungsergebnisse.

## 1 Einleitung

Das menschliche Leben ist sehr häufig von „Ungewissheiten“, bei denen nicht einmal die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse bekannt sind (vgl. Keiner 2005, S. 158), geprägt. In diesen Situationen werden dem Menschen dann Entscheidungen abverlangt, wozu auch Strategien und Heuristiken benötigt werden. Mousavi und Gigerenzer formulieren dies wie folgt: „In a world of uncertainty, heuristics are indispensable tools, not second-best solutions.“ (2014, S. 6). Auch Kinder kommen vor allem in Spielsituationen mit solchen Entscheidungsprozessen in Beziehung. Deshalb sollte die Kunst des gesunden Abwägens dort, wo es keine Sicherheiten gibt, früh gelernt werden (vgl. Martignon/Wasner 2005, S. 202). Die KMK-Bildungsstandards gehen einen Schritt in diese Richtung. Danach sollen Schülerinnen und Schüler bis zum Ende der 4. Klasse die Kompetenz erwerben, Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen in Zufallsexperimenten zu vergleichen. Speziell wird auf das Einschätzen von Gewinnchancen bei einfachen Zufallsexperimenten orientiert (vgl. KMK 2005, S. 11). Seitdem gibt es eine Reihe von Erfahrungsberichten und empirischen Studien zu Vorstellungen und Kompetenzen im Umgang mit symmetrischen Zufallsgeneratoren (z. B. Würfel und andere platonische Körper, Glücksrad, Urne). Beim Betrachten des Gesellschaftsspiels „Schweinerei“ entstand die Idee, den dort verwendeten asymmetrischen Zufallsgenerator – ein kleines Schwein – von Grundschulern untersuchen zu lassen. Im Rahmen einer wissenschaftlichen Hausarbeit (Schnabel 2014) wurde eine Studie mit 12 Kindern einer vierten Klasse durchgeführt. In Abwandlung bzw. Vereinfachung gegenüber dem Spiel, in dem jeweils zwei „Würfelschweine“ verwendet werden, untersuchten die Viertklässler nur eines. Zentrales Anliegen war zu untersuchen, ob die Kinder die Ungleichwahrscheinlichkeit der verschiedenen Ergebnisse erkennen und diese auch begründen können.

Daraus entstanden folgende Forschungsfragen:

- Inwiefern können Schüler einer vierten Klasse die unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten der verschiedenen Ereignisse bei einem asymmetrischen Zufallsgenerator erkennen?
- Inwieweit begründen die Schüler diese Ungleichverteilung der Ereignisse des asymmetrischen Zufallsgenerators?
- Können die Schüler anhand ihrer gesammelten Daten eine faire Bepunktung der verschiedenen Ereignisse für ein Würfelspiel mit asymmetrischen Zufallsgeneratoren geben (Spielregeln)?

Das als Zufallsgenerator verwendete Würfelschwein weist keine Teilsymmetrien auf: Die Beine des Schweins stehen versetzt zueinander und auch der Schwanz ist zur einen Seite gewunden. Die beiden Seiten des Schweins werden durch die deutlich abstehenden Ohren begrenzt.



Abb. 1: Der Zufallsgenerator in verschiedenen Positionen

Nach den Angaben des Herstellers gibt es sechs unterschiedliche Positionen, auf welchen das Schweinchen nach dem Würfeln landen kann:

- Auf allen Vieren stehend
- Auf der Schnauze und den Vorderbeinen stehend
- Auf dem Rücken liegend
- Auf der linken Seite liegend (Unterscheidung: Punkt zeigt zum Untergrund)
- Auf der rechten Seite liegend (Unterscheidung: Punkt zeigt nach oben)
- Auf einer Backe, einem Vorderfuß und einem Ohr stehend

Um ein besseres Bild vom Eintreten der einzelnen Ereignisse zu erhalten, führte die Versuchsleiterin

eine Versuchsreihe mit 2000 Würfeln durch. Die Ergebnisse sind in Abb. 2 dargestellt.







Position	Absolute Häufigkeit bei 2000 Würfeln	Relative Häufigkeit bei 2000 Würfeln
	181	0,0905 (9,05%)
	42	0,0210 (2,10%)
	653	0,3265 (32,65%)
	621	0,3105 (31,05%)
	499	0,2495 (24,95%)
	4	0,0020 (0,20%)

Abb. 2: Versuchsergebnisse nach 2000maligem Würfeln

Da sich in der Versuchsreihe zeigte, dass die sechste Position nur äußerst selten eintritt, wurde diese in der Studie nicht weiter berücksichtigt.

## 2 Aufbau der Studie

### 2.1 Gesamtüberblick

Die Versuchsteilnehmer wurden mit vier Aufgaben zum Würfelschwein konfrontiert, die eigens für die Untersuchung formuliert wurden. Die Aufgabenstellungen waren in eine fortlaufende kleine Geschichte eingebettet, die die Schüler motivieren und zum Nachdenken anregen sollte. Die einzelnen Aufgaben ergaben sich dabei aus dem jeweiligen Kontext der Geschichte. In Hinblick auf den Inhalt dieser Geschichte wurde versucht, mit dem Thema „Zirkus“, in dem ein Schwein außergewöhnliche Kunststücke beherrscht, ein möglichst geschlechtsneutrales Thema zu wählen, sodass sich sowohl Mädchen als auch Jungen gleichermaßen angesprochen fühlten.

### 2.2 Erkunden des asymmetrischen Zufallsgenerators

Die **erste Aufgabe** diente vorwiegend der Motivation. Ziel war das Kennenlernen des asymmetrischen Zufallsgenerators und das Herausfinden der unterschiedlichen Ereignisse, die beim Werfen eintreten können. Die Merkmale der einzelnen Positionen des Würfelschweins werden dadurch erfasst und bilden wiederum eine Grundlage für die folgende Datenerhebung (vgl. Hasemann/Mirwald/Hoffmann 2011, S. 143). Die Versuchsleiterin führte mit dem Vorlesen des Geschichtenanfangs in die Thematik ein. Durch Experimentieren in Kleingruppen mit dem Würfelschwein erkundeten die Schülerinnen und Schüler die möglichen Positionen, die beim Werfen

des Schweins eintreten können. Da unter den Versuchsteilnehmern auch unsichere Kinder waren, eignete sich der gemeinsame Einstieg, um Zweifel oder Ängste zu beseitigen.

Die von den Kindern zu bearbeitende Aufgabenstellung lautete:

Welche Kunststücke führt das Schwein vor?

Probiere es mit den kleinen Schweinchen aus!

### 2.3 Untersuchen des asymmetrischen Zufallsgenerators

Im Hauptteil der Studie bearbeiteten die Kinder drei Aufgaben (Aufgabe 2 bis 4) in Einzelarbeit.

Mit der **zweiten Aufgabe** begann die genauere Untersuchung des asymmetrischen Zufallsgenerators. Die Kinder sollten erkennen, dass nicht jede Position des Schweins gleich oft eintritt und Vermutungen über die Unterschiede anstellen. Durch die Geschichte und die Aufgabenformulierung erfolgte ein Hinweis, dass nicht alle Positionen gleich oft eintreten. Die Versuchsteilnehmer waren aufgefordert zu vermuten, auf welcher Position das Schwein am häufigsten landen könnte und ihre Vermutung anschließend begründen.

Zirkusdirektor Konstantin ist restlos begeistert. So etwas hat selbst er noch nie gesehen.  
Doch Konstantin bemerkt, dass dem Schwein einige Kunststücke besser gelingen, als andere.

2.) Vermute: Auf welcher Position könnte das Schwein am häufigsten landen?

---






Begründe deine Vermutung:

Abb. 3: Aufgabenstellung Aufgabe 2

Bei der Bearbeitung **dritten Aufgabe** führten die Schülerinnen und Schülern eine eigene Reihe aus dreißig Versuchen durch. Die einzelnen Versuchsausgänge wurden in einer Strichliste festgehalten. Die Aufgabe zielte darauf ab, einen quantitativen Vergleich zwischen den einzelnen Positionen zu ziehen und gegebenenfalls vorherige Vermutungen und Vorstellungen aus Aufgabenstellung 2 zu überdenken. Dazu standen den Schülern drei Ankreuzmöglichkeiten zur Verfügung. Die Entscheidung sollte wiederum begründet werden. Dass bei den drei Ankreuzmöglichkeiten neben der Gleichhäufigkeit sowohl die Option „Das Schwein landet auf einer Position besonders häufig“ als auch die Option „Das Schwein landet auf mehreren Positionen besonders häufig“ aufgeführt wurde, liegt an der relativ kleinen Versuchszahl, die beide Optionen als Möglichkeiten er-

scheinen lässt (vgl. Abb. 2: Versuchsergebnisse nach 2000maligem Würfeln)

3) Wirf dazu das Schwein 30-mal und führe eine Strichliste.

Position	Strichliste	Gesamtzahl
		
		
		
		
		

Schau dir deine Strichliste an. Was fällt dir daran auf?

Das Schwein landet auf allen Positionen gleich häufig.  
 Das Schwein landet auf einer Position besonders häufig.  
 Das Schwein landet auf mehreren Positionen besonders häufig.

Begründe deine Antwort:

Abb. 4: Aufgabenstellung Aufgabe 3

In der **vierten Aufgabe** ging es darum, Schlussfolgerungen für ein faires Spiel mit dem asymmetrischen Zufallsgenerator anzustellen. Die Kinder erfuhren, dass der Zirkusdirektor ein Spiel mit einem Würfelschwein herausgeben möchte. Ihre Aufgabe war es, die Spielregeln zu vervollständigen, indem sie Punkte für die einzelnen Positionen vergeben. Ein Teil der Spielregeln wurde auf dem Aufgabenblatt bereits formuliert:

Schließlich wird das Schwein Kurt engagiert und in die Zirkusshow aufgenommen. Und siehe da: Alle Besucher sind von den Socken und jubeln lauthals!

Wegen der großen Beliebtheit des Schweins und der großen Nachfrage nach Fanartikeln hat der Zirkusdirektor eine Idee: Er beschließt ein Schweine-Würfelspiel aus kleinen Plastikschweinen zu machen:

- Zwei Spieler würfeln abwechselnd mit dem Schweinchen.
- Für jeden Wurf (Kunststück) erhält der Spieler Punkte.
- Wer die meisten Punkte nach 15 Würfeln hat, hat gewonnen.

Natürlich soll das Spiel **fair** sein und er überlegt sich, wie viele Punkte jedes Kunststück wert ist.  
 Konstantin möchte **zwischen 1 und 20 Punkte** pro Kunststück vergeben.

4) Wie viele Punkte vergibst du, damit es ein **fares Spiel** ist?  
 Begründe jeweils deine Antwort.

Abb. 5: Aufgabenstellung Aufgabe 4

Die Eingrenzung der zu vergebenden Punkte auf den Zahlenraum zwischen 1 und 20 erfolgte aus zwei Gründen. Zum einen wird ausgeschlossen, dass die Kinder bei der Wahl einer zu großen Punktzahl (z. B.

1000 Punkte) den Blick für die Verhältnisse verlieren, zum anderen wird es durch die Eingrenzung leichter möglich, unterschiedliche Lösungen zu vergleichen. Die Kinder bekamen zwei weitere Arbeitsblätter mit Abbildungen der verschiedenen Positionen und Feldern für Punktevergabe und Begründung:


Position	So viele Punkte vergebe ich:
	
<b>Begründung</b>	
_____	
_____	
_____	
_____	

Abb. 6: Beispiel-Feld für die Punktevergabe zu Aufgabe 4

### 3 Ergebnisse der Studie

#### Aufgabe 1

Schwierigkeiten bereitete einigen Schülern die Unterscheidung zwischen den beiden Seiten (Punkt nach oben oder Punkt nach unten). Viele Kinder betrachteten die beiden Positionen als ein Ereignis und gaben an, dass es keinen Unterschied mache, ob das Schwein auf der linken oder rechten Seite landet. In Zuge dessen machte ein Schüler darauf aufmerksam, dass die beiden Seiten unterschiedlich seien und verwies dabei auf die differente Stellung der Beine. Ein weiterer Schüler wies darauf hin, dass bei einem Spielwürfel trotz gleich großer Seiten auch alle Positionen Berücksichtigung finden und daher eine Unterscheidung zu treffen ist. Betrachtet man die beiden Seitenpositionen als ein Ereignis, so fanden 10 Schüler alle möglichen Positionen.

#### Aufgabe 2

Für diese Aufgabe nutzten sieben Versuchsteilnehmer das Würfelschwein zur Aufgabenbearbeitung. Sieben Kinder vermuteten, dass das Schweinchen am häufigsten auf der Seite landen könnte. Drei der Versuchsteilnehmer entschieden sich für den Rücken und zwei Schüler gaben beide Positionen an. Für die Begründungen verwendeten die Schüler verschiedene Argumente. Sieben Kinder begründeten die Auftretenswahrscheinlichkeit auf Grundlage des Aufbaus und der Struktur des Zufallsgenerators. Durch Oberflächenvergleiche oder die Betrachtung prägnanter Formen, wie Ohren oder Beine, gelangten die Schüler zu einer Begründung. Die übrigen Schüler verwiesen in ihrer Begründung auf den Zufall, Wür-

felverhalten oder auf subjektive Vorerfahrungen. So vermutete ein Schüler, dass das Schwein am häufigsten auf dem Rücken landet, da er selbst auch oft auf dem Rücken lande, wenn er im Sport eine falsche Bewegung mache oder etwas noch nicht gut könne. Bei dem Würfelschwein sei dies ganz ähnlich, wenn das Schwein das Kunststück noch nicht gut könne.

### Aufgabe 3

Die Tatsache, dass kein einziges Kind Aussage 1 „Das Schwein landet auf allen Positionen gleich häufig“ angekreuzt hat, lässt den Schluss zu, dass alle bemerkten, dass die Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten der verschiedenen Ereignisse (Positionen) untereinander verschieden sind. Für die Entscheidung zwischen den Aussagen 2 und 3 wurden die Strichlisten genutzt. Allerdings erfolgte keine durchweg strenge Orientierung an den Würfelergebnissen, sondern es wurden auch Toleranzen zugelassen. Bei allen Schülern, die sich für Aussage 2 entschieden betrug der Abstand zwischen der häufigsten Merkmalsausprägung und der zweit häufigsten Ausprägung mindestens 2. Bei der Entscheidung für Aussage 3 wurde ein Abstand von 1 bei der Auswahl toleriert. Dies wird am Fallbeispiel einer Schülerin genauer betrachtet:

Position	Häufigkeit
Beine	1
Schnauze	0
Rücken	6
Seite (mit Punkt nach unten)	11
Seite (mit Punkt nach oben)	12

Abb. 7: Beispiel für Ergebnisse zu Aufgabe 3

Obwohl die Position „Seite mit Punkt nach oben“ im Vergleich zu „Seite mit Punkt nach unten“ einmal mehr gefallen ist, stellt dies für die Schülerin vermutlich keinen signifikanten Unterschied dar. Vielleicht spielte bei der Entscheidung auch eine Rolle, dass der Abstand zur Position „Rücken“ schon recht deutlich ist.

Die Begründungen erfolgten auf unterschiedliche Art. Die meisten Kinder argumentierten auf Basis der Struktur des Zufallsgenerators: „Auf dem Rücken und auf der Seite liegt es am meisten. Vielleicht, weil es hier am meisten Fläche zum Liegen hat.“ Andere Kinder verwiesen auf die Stabilität einzelner Positionen: „Das Schwein landet besonders häufig auf den großen und langen Seiten, denn auf den kleinen und kurzen Ecken und Kanten lässt es sich schlecht stehen.“ Oder „Das Schwein landet am meisten auf

den Seiten. Das Schwein landet auf den Seiten, weil das die stabilste Position ist.“ Wieder andere Versuchsteilnehmer argumentierten ausschließlich mit der Strichliste. Es gab aber auch Fehleinschätzungen. So wurde dem Zufallsgenerator ein eigener Willen hinsichtlich der Unbestimmbarkeit des Fallens zugesprochen oder das Würfelschwein mit dem Verhalten eines realen Schweins verglichen.

### Aufgabe 4

Fünf Versuchsteilnehmer stellten durchweg eine korrekte Beziehung zwischen dem Punktwert und der Häufigkeit der Position her. Sie erkannten, dass sie für weniger oft auftretende Ereignisse mehr Punkte vergeben mussten. Den meisten der anderen sieben Schüler gelang es, einige, aber nicht alle Positionen entsprechend der Relation angemessen zu bepunkteten und zu begründen.

Bei der Vergabe der Punkte stellten sich die Kinder häufig die folgenden Fragen:

Gebe ich der Position, die am seltensten (oder gar nicht) gewürfelt wurde die volle Punktzahl?

Erhält die Position, die am häufigsten vorkam, nur einen Punkt oder mehr? Warum?

Welche Punktabstände zwischen den Positionen sind angemessen?

Wir betrachten wiederum ein Fallbeispiel eines Mädchens. In der Tabelle sind die Häufigkeit des Eintretens einzelner Positionen, die vergebene Punktzahl und die Begründung zusammengefasst:

Position	Häufigkeit	Punkte	Begründung
Beine	3	15	Das Schwein landet nicht oft so.
Schnauze	1	20	Am seltensten landet das Schwein so.
Rücken	10	5	Das Schwein landet oft auf dem Rücken.
Seite (P. u.)	10	5	Das Schwein landet oft auf der rechten Seite.
Seite (P. o.)	8	10	Auf der Seite landet das Schwein mittel viel.

Abb. 8: Beispiel für eine Punktbewertung zu Aufgabe 4

Bezüglich der Position Rücken und den beiden Seiten machte das Mädchen folgende Aussage: „Eigentlich

landet es an denen drei gleich oft. [...] Macht es einen Unterschied, ob das Schwein auf der Seite oder der Seite landet? [...] Oder war das hier einfach Zufall, dass es so gelandet ist?“ Sie vergibt schließlich für die Positionen „Rücken“ und „Seite mit Punkt nach unten“ jeweils fünf Punkte. Für die Position „Seite mit Punkt nach oben“ zieht sie eine Punktzahl von sieben oder zehn in Erwägung und erklärt, dass sie sich unsicher sei, weil sie nicht wisse, ob das Zufall oder immer so sei. Sie vergibt schlussendlich zehn Punkte für diese Position.

Bei den Begründungen wurde, vor allem von den Kindern die zu einer sinnvollen Punktbewertung kamen, auf die Häufigkeiten aus der Strichliste zurückgegriffen. Weiterhin wurde mit Aufbau und Struktur des Zufallsgenerators sowie naiven Vorerfahrungen argumentiert.

#### **4 Zusammenfassung und Interpretation der Ergebnisse**

Die Untersuchungsergebnisse zeigen, dass Viertklässler durchaus in der Lage sind, die Besonderheiten eines asymmetrischen Zufallsgenerators zu erkennen.

Die meisten Schüler waren in der Lage, die ungleichen Häufigkeiten zu begründen und mit angemessenen Argumenten zu untermauern.

Es traten aber auch Fehlvorstellungen auf, die vor allem bei den Begründungen deutlich wurden. Meist argumentierten diese Schüler auf Basis naiver Vorerfahrungen, indem sie beispielsweise das Würfelschwein mit dem Verhalten eines realen Schweins verglichen (vgl. Eichler/Vogel 2009, S. 149). Ihrer Vorstellung zu Folge, werden die beiden Seitpositionen häufig gewürfelt, da Schweine sich gerne „im Schlamm suhlen“. Ein anderes Kind verglich die Würfelergebnisse mit eigenen Erfahrungen aus dem Sport. Dass es die Position „Rücken“ häufig gewürfelt hat, begründete es damit, dass es selbst oft beim Sport auf dem Rücken lande, wenn es eine falsche Bewegung mache oder etwas noch nicht gut könne. Neben diesen subjektiven Fehlvorstellungen wurde darüber hinaus ersichtlich, dass zwei Kinder die Gleichwahrscheinlichkeit beim Würfel mit einem fairen Spielwürfel im Vorfeld nicht erfasst und durchdrungen haben. Die Schüler zogen Vergleiche zwischen dem Würfeln einer 6 und dem Würfeln einer seltenen Position des Würfelschweins. Umso bedeutender erscheint es in diesem Zusammenhang, grundlegende Vorstellungen zu symmetrischen Zufallsgeneratoren aufzubauen, um auf Basis dieser begründete Abgrenzungen zu asymmetrischen Zufallsgeneratoren treffen zu können. Demzufolge gilt es im Stochastikunterricht der

Grundschule im Sinne des Spiralprinzips Phänomene der Wahrscheinlichkeit wiederholt zu thematisieren und zu vernetzen. In Zuge dessen können ebenso subjektive Fehlvorstellungen der Kinder im Unterricht aufgegriffen und rationalisiert werden (vgl. Heitele 1976, S. 254).

#### **Literatur**

- Eichler, A./Vogel, M. (2009): Leitidee Daten und Zufall. Von konkreten Beispielen zur Didaktik der Stochastik. Wiesbaden: Vieweg und Teubner.
- Hasemann, K./Mirwald, E./Hoffmann, A. (2011): Daten, Häufigkeit, Wahrscheinlichkeit. In: Walther, G. et al. (Hrsg.) (2011): Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret. Cornelsen Scriptor, S. 141–161.
- Heitele, D. (1976): Didaktische Ansätze zum Stochastikunterricht in der Grundschule und Förderschule. Augsburg: Blasaditsch GmbH.
- Keiner, E. (2005): Stichwort: Unsicherheit – Ungewissheit – Entscheidungen. In: Zeitschrift für Erziehungswissenschaft 8(2), S. 155–172.
- KMK (2005): Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. Beschluss vom 15.10.2004. München: Luchterhand Verlag.
- Martignon, L./Wasner, C. (2005): Schulung frühen stochastischen Denkens bei Kindern. In: Zeitschrift für Erziehungswissenschaft 8(2), S. 202–222.
- Mousavi, S./Gigerenzer, G. (2014): Risk, Uncertainty, and Heuristics. In: Journal of Business Research (67)8, S. 1–31.
- Schnabel, S. (2014): Vorstellungen von Schülerinnen und Schülern einer 4. Klasse zu einem asymmetrischen Zufallsgenerator – exemplarisch dargestellt am Umgang mit dem Spiel „Schweinerei“. Gießen: Wissenschaftliche Hausarbeit im Rahmen der Ersten Staatsprüfung für das Lehramt an Grundschulen im Fach Mathematik.
- Schnabel, S. (2017): Das Würfelschweinchen. Grundschulkind in Klasse 3 und 4 untersuchen einen asymmetrischen Zufallsgenerator. In: Grundschulunterricht Mathematik 64(4), S. 24–26.

#### **Anschrift der Verfasser**

Sandra Schnabel  
Brüder-Grimm-Schule  
Alter Kirchhainer Weg 8  
35039 Marburg  
sandra-schnabel@web.de

Bernd Neubert  
Justus-Liebig-Universität  
Institut für Didaktik der Mathematik  
Karl-Glöckner-Straße 21 C  
35394 Gießen  
Bernd.Neubert@math.uni-giessen.de